جامعة قسنطينة السنة الجامعية 2009/2008

حل السلسلة رقم 03 : حركة النقطة المادية

- التمرين 02: ينتقل جسيم على مسار معادلته : $\vec{r} = (t^2 + t)\vec{i} + (3t - 2)\vec{j} + (2t^3 - 4t^2)\vec{k}$

اوجد عند اللحظة $t = 2s$:

1- سرعته و طويلتها. 2- تسارعه و طويلته

- التمرين 03: تعطى إحداثيات نقطة مادية بدلالة الزمن على النحو التالي :

$X(t) = 2t$ و $Y(t) = 4t(t - 1)$

1- عين طبيعة المسار و أرسمه في معلم ديكارتي ثم حدد نقطة بداية الحركة و اتجاهها

2- احسب عبارة شعاع السرعة عند اللحظة t، ثم استخرج طويلتها

3- بين بأن الحركة ذات تسارع ثابت ، أحسب مركبتيه المماسية والناظمية ، ثم استنتج نصف قطر الإنحاء عند اللحظة $t = 1s$. ما هي اللحظة الزمنية التي من اجلها يكون شعاعا السرعة و التسارع متعامدين ؟

4- هل توجد لحظة زمنية يكون فيها الشعاعان متوازيين ؟

- التمرين 04: نعرف شعاع الموقع لنقطة مادية بالمعادلة التالية: $\overrightarrow{r(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ،

حيث: $x(t) = R.Cos(\omega t)$ ، $y(t) = R.Sin(\omega t)$ و $z(t) = V_0 t$

V_0 , R و ω ثوابت موجبة

1- أستخرج معادلة المسار ثم حدد طبيعته ؟

2- احسب شعاعي السرعة و التسارع

3- عين الزاوية بين شعاع السرعة و مولدات أسطوانة للمسار، ثم عين المعادلة الزمنية $S(t)$

4- نفترض أن $V_0 = 0$ كيف يصبح مسار النقطة المادية ؟ ما هي إذا المعادلة الزمنية ؟

- التمرين 06 : تتحرك نقطة مادية في مستوى وفق المعادلات الوسيطية :

$$x(t) = a.Sin(\omega t) \quad ; \quad y(t) = b.Cos(\omega t)$$

a , b و ω ثوابت موجبة، عين :

1- معادلة مسارها

2- عبارتي سرعتها و تسارعها

3- اللحظات التي من أجلها تكون طويلتا السرعة و التسارع أعظمية

- التمرين 08 : تتحرك نقطة مادية في الإحداثيات القطبية وفق المعادلات الوسيطية :

$$\rho = r(1 - Sins\omega t) \quad , \quad \theta = \omega t$$

1- شكل جدول تغير θ , ρ بدلالة الزمن ثم أرسم مسار الحركة

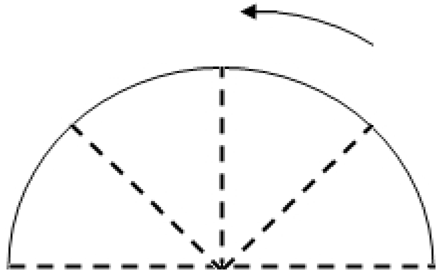
2- أحسب المركبات القطبية لشعاعي السرعة و التسارع ، ثم استنتج المركبات الديكارتية الموافقة.

3- أحسب طويلتي السرعة و التسارع و استنتج المركبتين المماسية و الناظمية لشعاع التسارع.

4- أحسب نصف قطر انحناء المسار بدلالة الزمن

5- أحسب طول المسار بين اللحظة الابتدائية $t_1 = 0$ و اللحظة $t_2 = 2\pi / \omega$

ـ التمرين 09 : **(المنزل)** في حالة لمسار نصف دائري ، مثل شعاع التسارع عند النقاط المحددة :
$\theta = 0\ ,\ \pi/4\ ,\ \pi/2\ ,\ 3\pi/4\ ,\ \pi$ ، و ذلك في الحالتين :
ـ الحركة دائرية منتظمة
ـ الحركة دائرية متغيرة بانتظام. (عند النقطة $\theta = 0$ نعطي $\gamma = 0$)



الحركة النسبية

ـ التمرين 11: إحداثيات جسيم متحرك بالنسبة للمعلم $(R,O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تعطى بدلالة الزمن حسب العلاقات :

$$x(t) = t^2 - 4t + 1\ ;\ \ y(t) = -2t^4\ ;\ \ z(t) = 3t^2\ .$$

وتكتب في معلم ثاني $(R',O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ من الشكل :

$$x' = t^2 + t + 2\ ;\ y' = -2t^4 + 5\ ;\ z' = 3t^2 - 7\ .$$

1ـ أكتب عبارة سرعة الجسيم $\vec{V}$ في المعلم $(R,O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بدلالة سرعة الجسيم $\vec{V}'$ في المعلم $(R',O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$
2ـ أكتب نفس الشيء بالنسبة للتسارع .
3ـ حدد قانون الحركة المكتسبة للمعلم $(R',O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ بالنسبة للمعلم $(R,O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

ـ التمرين 12 : معلم نسبي Ox'y' يقوم بدوران منتظم حول نقطة O ، و جسيم M يتحرك فوق المحور Ox' بسرعة ثابتة. في اللحظة الابتدائية الجسيم يوجد عند النقطة O و المحور Ox' متطابق مع المحور Ox
1ـ أحسب عبارة السرعة المكتسبة ، ثم أستنتج السرعة المطلقة.
في المرة الثانية النقطة تتحرك وفق المحور Ox' بتسارع ثابت بحيث تتواجد في اللحظة الابتدائية عند النقطة O و المحور Ox' متطابق مع المحور Ox
2ـ أحسب عبارات كل من التسارع النسبي ، التسارع المكتسب ، و التسارع التكميلي (كوريو ليس) ، ثم أستنتج التسارع المطلق.
3ـ أستخرج مباشرة عبارة التسارع المطلق باستعمال مركبات شعاع الموقع في المعلم المطلق.

1

حل السلسلة رقم 2: حركة النقطة المادية

- التمرين 2:

1- حساب شعاع السرعة:

$$\vec{v} \begin{cases} 2t+1 \\ 3 \\ 6t^2-8t \end{cases} \quad : t=2 \Rightarrow \vec{v}\begin{cases} 5 \\ 3 \\ 8 \end{cases} \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{25+9+64} \simeq 9{,}899$$

2- حساب شعاع التسارع:

$$\vec{\gamma} \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 12t-8 \end{cases} \quad : t=2 \Rightarrow \vec{\gamma}\begin{cases} 2 \\ 0 \\ 16 \end{cases} \Rightarrow \|\vec{\gamma}\| = \sqrt{4+256} \simeq 16{,}125$$

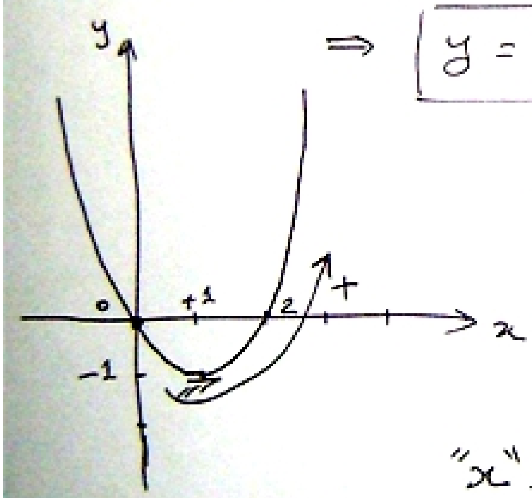
- التمرين 3:

1- طبيعة المسار: نحذف الزمن ⇐

$x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$

$y = 4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\Rightarrow \boxed{y = x^2 - 2x}$



هو قطع مكافئ، له محور موازي لـ (oy) مقعر نحو الأعلى، يتقاطع مع (ox) في النقطتين $x_1 = 0$ و $x_2 = 2$

ذروته عند $x = 1$ و $y_0 = -1$

بداية عند $t=0$ ⇐ أي عند $O(0,0)$

وتكون في إتجاه تزايد الزمن "t" أي تزايد "x"

2- حساب السرعة: $\vec{v}\begin{cases} 2 \\ 8t-4 \end{cases} \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{4+(8t-4)^2}$

3- حساب التسارع: $\vec{\gamma}\begin{cases} 0 \\ 8 \end{cases}$ أي أن التسارع ثابت نحو (oy)

لدينا دائماً: التسارع المماسي: $\|\vec{\gamma}_T\| = \left|\frac{d\|\vec{v}\|}{dt}\right|$

②

نجد:
$$\frac{d\|\vec v\|}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{2(8t-4)\cdot 8}{\sqrt{4+(8t-4)^2}} = \frac{8(8t-4)}{\sqrt{4+(8t-4)^2}}$$

ولدينا إذاً $\vec u_T$: شعاع الواحدة المماسي

$$\boxed{\vec\gamma_T = \frac{8(8t-4)}{\sqrt{4+(8t-4)^2}}\,\vec u_T} \quad , \quad \vec u_T = \frac{\vec v}{\|\vec v\|}$$

والتسارع الناظمي:
$$\|\vec\gamma_N\| = \sqrt{\|\vec\gamma\|^2 - \|\vec\gamma_T\|^2}$$

$$\|\vec\gamma_N\| = \sqrt{(8)^2 - \left[\frac{8(8t-4)}{\sqrt{4+(8t-4)^2}}\right]^2} = \sqrt{\frac{4\times 64}{\left[\sqrt{4+(8t-4)^2}\right]^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec\gamma_N\| = \frac{16}{\sqrt{4+(8t-4)^2}}} \Rightarrow \vec\gamma_N = \|\vec\gamma_N\|\cdot\vec u_N$$

$\vec u_N$: شعاع الواحدة الناظمي

حساب نصف قطر الإنحناء: لدينا دائما
$$\|\vec\gamma_N\| = \frac{\|\vec v\|^2}{\rho}$$

* ρ: نصف قطر الإنحناء:
$$\rho = \frac{\|\vec v\|^2}{\|\vec\gamma_N\|} = \frac{\left[4+(8t-4)^2\right]}{\left[\frac{16}{\sqrt{4+(8t-4)^2}}\right]}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{16}\left[4+(8t-4)^2\right]^{3/2} = \frac{1}{2}\left[1+4(2t-1)^2\right]^{3/2}$$

* يكون $\vec v$ و $\vec\gamma$ متعامدين أي $\vec v\cdot\vec\gamma = 0 \Leftarrow$ $\vec\gamma$ دائما نحو (oy)

لذلك $\vec v$ سوف يكون نحو (ox) ومنه فإن $v_y = 0$

أي $8t-4=0 \Leftarrow \boxed{t_0 = \frac{1}{2}\,s}$

4): يكون $\vec v$ و $\vec\gamma$ متوازيين أي $\vec v\wedge\vec\gamma = \vec 0 \Leftarrow$ $\vec\gamma$ دائما نحو (oy)

لذلك $\vec v$ سوف يكون نحو (oy) ومنه $v_x = 0$ وهو مستحيل $(v_x=2)$

③

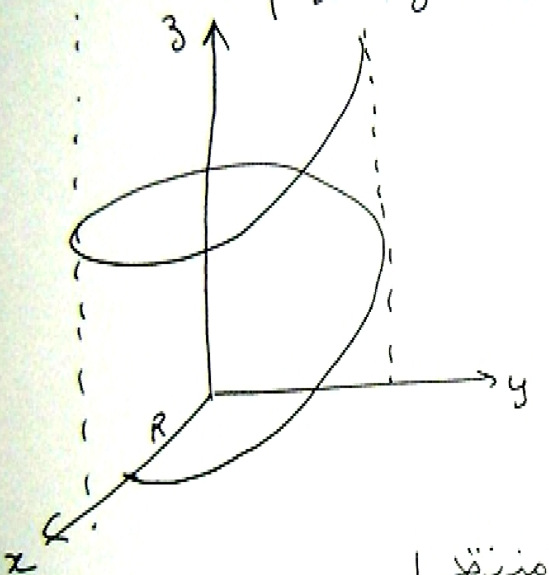
- التمرين 4 :- نضع $\theta = \omega t$: الزاوية القطبية

1- $t = \frac{\theta}{\omega}$ ومنه $x = R\cos\theta$ ، $y = R\sin\theta$ ، $z = \frac{V_0}{\omega}\theta$

وتكون معادلة المسار: $\Longleftarrow$

$$\begin{cases} x = R\cos\left(\frac{\omega}{V_0}z\right) \\ y = R\sin\left(\frac{\omega}{V_0}z\right) \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

عبارة عن لولب منتظم قاعدته دائرة مركزها "O" ونصف قطرها "R" ومحوره Oz



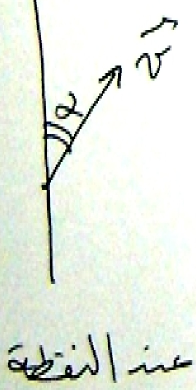
4

2)* حساب شعاع السرعة :-

$$\vec{v}\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -R\omega\sin\omega t \\ \frac{dy}{dt} = R\omega\cos\omega t \\ \frac{dz}{dt} = V_0 \end{cases}$$

$\frac{dz}{dt} = V_0 = cst$: السرعة التصاعدية ثابتة (منتظم)

(المستقيم المولد)



* حساب التسارع :-

$$\vec{\gamma}\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2\cos\omega t \\ \frac{dv_y}{dt} = -R\omega^2\sin\omega t \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

3)- يقع المسار على السطح الجانبي للأسطوانة، يكون عند النقطة M السرعة مماسية للمسار أي للسطح الجانبي لهذه الأسطوانة، والمولدات (les generatrices) هي مستقيمات عمودية تقع في سطح الأسطوانة تكون موازية للمحور (Oz) أي للشعاع $\vec{k}$

(4)

ومنه : نستعمل الجداء السلمي : $\vec{v}\cdot\vec{k} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{k}\|\cdot\cos(\vec{v},\vec{k})$

لنجد : $\cos(\vec{v},\vec{k}) = \cos\alpha = \dfrac{v_z}{\|\vec{v}\|}$

السرعة ثابتة
الحركة منتظمة : $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} = \sqrt{R^2\omega^2+V_0^2}$

α : زاوية ثابتة : $\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2\omega^2+V_0^2}}$

- حساب المعادلة الزمنية :

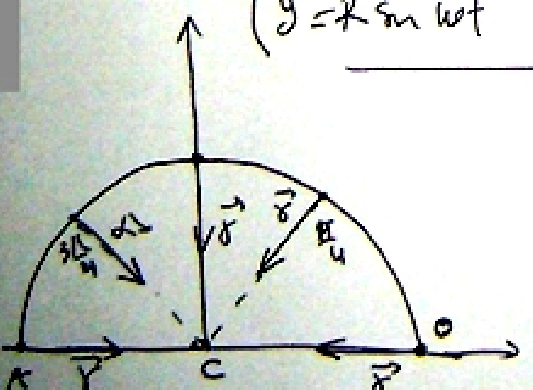
$$\|\vec v\| = \left|\frac{dS}{dt}\right| \Rightarrow dS = \|\vec v\|\cdot dt \Rightarrow S(t)=\int_0^t \|\vec v\|\cdot dt$$

$$\Rightarrow S(t) = \int_0^t \sqrt{R^2\omega^2+V_0^2}\cdot dt$$

$$\boxed{S(t) = \left(\sqrt{R^2\omega^2+V_0^2}\right)\cdot t}$$

4) :- عندما تصبح $V_0=0$ ، لا توجد مركبة حسب (Oz) والحركة تصبح دائرية منتظمة :

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=R^2$$



- التمرين 09 :- الحركة دائرية :

* الحركة منتظمة $\Leftarrow$ $\|\vec v\| = ct$

وبالتالي : $\|\vec{\gamma}_N\| = \dfrac{\|\vec v\|^2}{R} = ct$

$\|\vec\gamma_T\| = \dfrac{d\|\vec v\|}{dt} = 0$

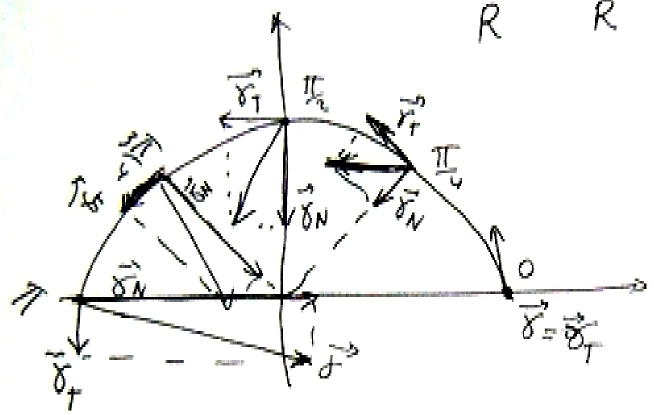
أي أن $\boxed{\vec\gamma = \vec\gamma_N} = ct$ لها نفس الطويلة وموجهة نحو مركز الدائرة

(5)

* الحركة متغيرة بانتظام : ⟸ $\|\vec{\gamma}_T\| = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = ct.$

وهذا يعني أن $\|\vec{v}\| = \|\vec{\gamma}_T\|.t + \underbrace{\|\vec{v}_0\|}_{0}$

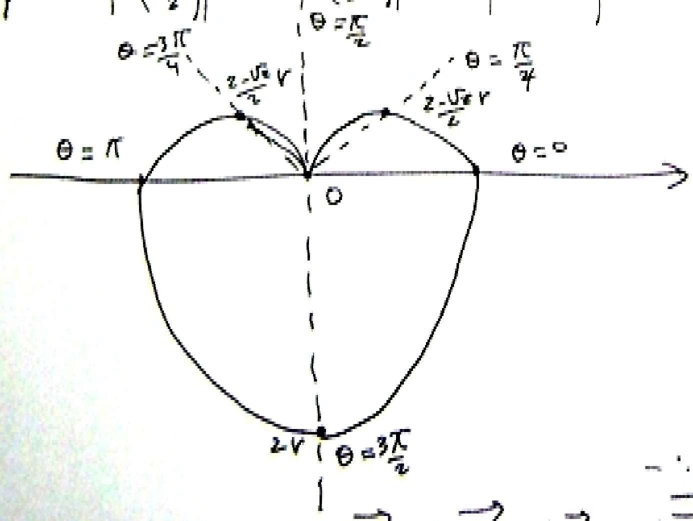
والتسارع الناظمي : $\|\vec{\gamma}_N\| = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R} = \frac{\|\vec{\gamma}_T\|^2}{R}t^2$: يتزايد من الشكل $\sim t^2$



- التمرين 08 :-

-1

t	0	$\frac{\pi}{4\omega}$	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{3\pi}{4\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π
ρ	r	$r\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$	0	$r\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$	r	$2r$	r



2 - حساب السرعة :-

$\vec{OM} = \rho.\vec{u}_\rho$ ⟸ $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ ⟸ $\dot{\theta} = \omega$ ، $\dot{\rho} = -r\omega\cos\omega t$

$\vec{v} = (-r\omega\cos\omega t)\vec{u}_\rho + (r\omega[1-\sin\omega t])\vec{u}_\theta$ مع $\vec{u}_\rho\begin{cases}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{cases}$ ، $\vec{u}_\theta\begin{cases}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{cases}$

بالتعويض نجد: $\vec{v}\begin{cases} v_x = -2r\omega\cos^2\omega t \\ v_y = r\omega\cos\omega t(1-2\sin\omega t)\end{cases}$

⑥

- حساب التسارع :-

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

مع $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = 0$ و $\ddot{\rho} = r\omega^2 \sin\omega t$ ومنه :

$$\vec{\gamma} = \left[r\omega^2 \sin\omega t - r\omega^2(1 - \sin\omega t)\right]\vec{u}_\rho + \left[-2r\omega^2\cos\omega t\right]\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\gamma}\begin{cases}\gamma_x = r\omega^2(4\sin\omega t\cos\omega t - 1)\\ \gamma_y = r\omega^2(4\sin^2\omega t - 3)\end{cases}$$

3- طويلة السرعة

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{(-r\omega\cos\omega t)^2 + (r\omega[1 - \sin\omega t])^2} = r\omega\sqrt{2(1 - \sin\omega t)}}$$

طويلة التسارع :-

$$\boxed{\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{(2\sin\omega t - 1)^2 + (-2\cos\omega t)^2}\cdot r\omega^2 = r\omega^2\sqrt{5 - 4\sin\omega t}}$$

- التسارع المماسي :-

$$\boxed{\|\vec{\gamma}_T\| = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = -\frac{r\omega^2\cos\omega t}{\sqrt{2(1 - \sin\omega t)}}}$$

- التسارع الناظمي :

$$\|\vec{\gamma}_N\| = \sqrt{\|\vec{\gamma}\|^2 - \|\vec{\gamma}_T\|^2} = r\omega^2\left[(5 - 4\sin\omega t) - \frac{\cos^2\omega t}{2(1 - \sin\omega t)}\right]^{1/2}$$

$$= r\omega^2\left[\frac{9 - 18\sin\omega t + 9\sin^2\omega t}{2(1 - \sin\omega t)}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{9}{2}}\cdot r\omega^2\left[\frac{(1 - \sin\omega t)^2}{(1 - \sin\omega t)}\right]^{1/2}$$

$$\boxed{\|\vec{\gamma}_N\| = \sqrt{\frac{9}{2}}\, r\omega^2(1 - \sin\omega t)^{1/2}}$$

4- حساب نصف قطر الإنحناء :- لدينا $\|\vec{\gamma}_N\| = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\rho} \Leftarrow \rho = \frac{\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{\gamma}_N\|}$

$$\boxed{\rho = \frac{2\sqrt{2}}{3}r\cdot\sqrt{(1 - \sin\omega t)}} \Leftarrow \rho = \frac{2r^2\omega^2(1 - \sin\omega t)}{\sqrt{\frac{9}{2}}\, r\omega^2(1 - \sin\omega t)^{1/2}}$$

7

5- حساب طول المسار:

$$ds = \|\vec{v}\| \cdot dt$$

$$\Rightarrow S = \int_{t_1}^{t} \|\vec{v}\| \cdot dt = \int_0^{2\pi/\omega} r\omega\sqrt{2(1-\sin\omega t)} \cdot dt \quad , \quad 1 = \sin^2\frac{\omega t}{2} + \cos^2\frac{\omega t}{2}$$

$$\sin\omega t = 2\sin\frac{\omega t}{2} \cdot \cos\frac{\omega t}{2}.$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} r\omega\sqrt{2\left(\sin\frac{\omega t}{2} - \cos\frac{\omega t}{2}\right)^2} \cdot dt = r\omega\sqrt{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\left(\sin\frac{\omega t}{2} - \cos\frac{\omega t}{2}\right)dt.$$

$$S = r\omega\sqrt{2}\left[\frac{2}{\omega}\left(-\cos\frac{\omega t}{2} - \sin\frac{\omega t}{2}\right)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 2\sqrt{2}\, r.\left[(\cos\pi - \sin\pi) - (\cos 0 - \sin 0)\right]$$

$$S = r\omega\sqrt{2}\left[-1 - (1)\right] = = -2\sqrt{2}\, r\omega$$

ننزع (-) لأن $S>0$ دائماً و الإشارة (-) جاءت من الجذر

- التمرين 11 :

الحركة النسبية :

$\vec{i} = \vec{i'}$, $\vec{j} = \vec{j'}$, $\vec{k} = \vec{k'}$

1- في المعلم $(O\vec{i}\vec{j}\vec{k})$. لدينا

$$\vec{v}\begin{cases} 2t-4 \\ -8t^3 \\ 6t \end{cases}$$

وفي المعلم $(O'\vec{i'}\vec{j'}\vec{k'})$ نجد :

$$\vec{v'}\begin{cases} 2t+1 \\ -8t^3 \\ 6t \end{cases}$$

2- في المعلم $(O\vec{i}\vec{j}\vec{k})$:

$$\vec{\gamma}\begin{cases} 2 \\ -24t^2 \\ 6 \end{cases}$$

وفي المعلم $(O'\vec{i'}\vec{j'}\vec{k'})$:

$$\vec{\gamma'}\begin{cases} 2 \\ -24t^2 \\ 6 \end{cases}$$

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma'} \Leftarrow$$

و

$$\vec{v} = \vec{v'} - 5\vec{i}$$

في الحالة العامة نكتب ، $\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v_e}$ حيث $\vec{v_e}$ السرعة المكتسبة

بالمقابلة نجد أن

$$\vec{v_e} = -5\vec{i}$$

أي أن المعلم $(O'\vec{i'}\vec{j'}\vec{k'})$.يتحرك بسرعة $\vec{v_e}$ بالنسبة للمعلم $(O\vec{i}\vec{j}\vec{k})$